特殊な構造を持つ線形計画問題の内点法 (最適化の数理とアルゴリズム)

水野, 眞治

数理解析研究所講究録 1297 巻 2002 年 234-244

特殊な構造を持つ線形計画問題の内点法

東京工業大学 社会理工学研究科 経営工学専攻

水野 眞治* (Shinji Mizuno)

概要

確率計画問題等に現れる特殊な構造を持つ大規模な線形計画問題を扱う。この線形計画問題は、係数行列の右上部分がゼロ行列となっており、それが再帰的に現れる。このような線形計画問題の特殊構造を利用した主双対内点法を提案し、その反復回数が一般の主双対内点法に比べ少なくなることを示す。

1 はじめに

ここでは、特殊な構造を持った線形計画問題を取り扱う。標準形の線形計画問題は、次のように表すことができる。

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{subject to} & Ax = b, \quad x \geq 0 \end{array}$$

この線形計画問題において制約条件の係数行列 A が次のような構造を持つとする。

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & A_3 \end{pmatrix} \in R^{(m_1+m_2)\times(n_1+n_2)}.$$

ここで、n_1, n_2, m_1, m_2 は正の整数（自然数）であり、部分行列 A_1, A_2, A_3 は、それぞれ $m_1 \times n_1$ 行列、$m_2 \times n_1$ 行列、$m_2 \times n_2$ 行列である。右上部分にある 0 行列のサイズは、$m_1 \times n_2$ である。係数ベクトル $c \in R^{n_1+n_2}$、制約式の右辺ベクトル $b \in R^{m_1+m_2}$、変

*〒 152-8552 東京都目黒区大岡山 2-21-1, mizuno@me.titech.ac.jp

数ベクトル $x \in R^{n_1+n_2}$ をそれぞれ (c_1, c_2), (b_1, b_2), (x_1, x_2) と部分ベクトルを使って表すことにより、ここで扱う線形計画問題は

$$
\begin{array}{lll}
\min & c_1^T x_1 + c_2^T x_2 & \\
\text{subject to} & A_1 x_1 & = b_1 \\
& A_2 x_1 + A_3 x_2 & = b_2 \\
& (x_1, x_2) \geq 0 &
\end{array}
\tag{1}
$$

と表すことができる。

本論で提案する内点法は、上記のように表されるすべての線形計画問題に適用することが可能であるが、提案するアルゴリズムにより効率的に解くためには、問題が次の仮定をみたすことが必要である。

仮定 1 線形計画問題 *(1)* において、次のことが成り立つものとする。

1. 行列 A_1 のサイズ $m_1 \times n_1$ は、行列 A_3 のサイズ $m_2 \times n_2$ にくらべはるかに小さい $(m_1 << n_1$ かつ $m_2 << n_2)$。

2. 行列 A_3 は、全体の行列 A と同じような構造を持つか、あるいはブロック対角である。

この仮定をみたす典型的な行列として

$$
\begin{pmatrix}
A_1 & & & & 0 & & & \\
& A_1' & & & & 0 & & \\
& & A_1'' & & & & 0 & \\
& & & A_1''' & & & & 0 \\
A_2 & & & & A_4 & 0 & 0 & 0 \\
& A_2' & & & 0 & A_5 & 0 & 0 \\
& & A_2'' & & 0 & 0 & A_6 & 0 \\
& & & A_2''' & 0 & 0 & 0 & A_7
\end{pmatrix}
$$

という形がある。この例のように、仮定1の2については、再帰的に起こることに注意されたい。

このような問題は、多段階確率計画問題によく現れる。実際、文献 [1] には、4期間

7シナリオからなる確率計画問題から派生する線形計画問題の係数行列として、

$$
\left(\begin{array}{ccccccccccccc}
W_1 &&&&&&&&&&&& \\
T_1^1 & W_2^1 &&&&&&&&&&& \\
& T_2^1 & W_3^1 &&&&&&&&&& \\
&& T_3^1 &&&& W_4^1 &&&&&& \\
&& T_3^2 &&&&& W_4^2 &&&&& \\
& T_2^2 && W_3^2 &&&&&&&&& \\
&&& T_3^3 &&&&& W_4^3 &&&& \\
T_1^2 & W_2^2 &&&&&&&&&&& \\
& T_2^3 &&& W_3^3 &&&&&&&& \\
&&&& T_3^4 &&&&& W_4^4 &&& \\
& T_2^4 &&&& W_3^4 &&&&&&& \\
&&&&& T_3^5 &&&&& W_4^5 && \\
&&&&& T_3^6 &&&&&& W_4^6 & \\
&&&&& T_3^7 &&&&&&& W_4^7
\end{array}\right)
$$

が示されている。この行列は、行と列の順を入れ替えることにより、次のように表すことができる。

$$
\left(\begin{array}{ccccccccccccc}
W_1 &&&&&&&&&&&& \\
T_1^1 & W_2^1 &&&&&&&&&&& \\
T_1^2 & W_2^2 &&&&&&&&&&& \\
& T_2^1 & W_3^1 &&&&&&&&&& \\
&& T_3^1 & W_4^1 &&&&&&&&& \\
&& T_3^2 && W_4^2 &&&&&&&& \\
& T_2^2 &&&& W_3^2 &&&&&&& \\
&&&&& T_3^3 & W_4^3 &&&&&& \\
& T_2^3 &&&&&& W_3^3 &&&&& \\
&&&&&&& T_3^4 & W_4^4 &&&& \\
& T_2^4 &&&&&&&& W_3^4 &&& \\
&&&&&&&&& T_3^5 & W_4^5 && \\
&&&&&&&&& T_3^6 && W_4^6 & \\
&&&&&&&&& T_3^7 &&& W_4^7
\end{array}\right)
$$

この行列が、仮定1をみたすことは明らかであろう。

大規模な線形計画問題を効率的に解く解法に Karmarkar [2] によって提案された内点法がある。最近では、Kojima, Mizuno and Yoshise [3] と Tanabe [4] によって提案された主双対内点法が実際によく使われている。本論では、仮定 1 をみたす線形計画問題 (1) を効率的に解く主双対内点法を提案し、その性質を調べる。

2 最適条件

線形計画問題

$$\begin{array}{lll} \min & c_1^T x_1 + c_2^T x_2 & \\ \text{subject to} & A_1 x_1 & = b_1 \\ & A_2 x_1 + A_3 x_2 & = b_2 \\ & (x_1, x_2) \geq 0 & \end{array}$$

を主問題とするとき、その双対問題は、

$$\begin{array}{llll} \max & b_1^T y_1 + & b_2^T y_2 & \\ \text{subject to} & A_1^T y_1 + & A_2^T y_2 + s_1 & = c_1 \\ & & A_3^T y_2 + s_2 & = c_2 \\ & & (s_1, s_2) \geq 0 & \end{array}$$

と表される。ここで、$(y_1, y_2) \in R^{m_1+m_2}$, $(s_1, s_2) \in R^{n_1+n_2}$ である。したがって、(x_1, x_2) が主問題の最適解であり、(y_1, y_2, s_1, s_2) が双対問題の最適解であるならば、最適条件

$$\begin{array}{llll} A_1 x_1 & & & = b_1 \\ A_2 x_1 + & A_3 x_2 & & = b_2 \\ A_1^T y_1 + & A_2^T y_2 + & s_1 & = c_1 \\ & A_3^T y_2 + & s_2 & = c_2 \\ & & X_1 s_1 & = 0 \\ & & X_2 s_2 & = 0 \\ & (x_1, x_2, s_1, s_2) \geq 0 & & \end{array} \tag{2}$$

が成立する。ここで、$X_1 = \mathrm{diag}(x_1)$ と $X_2 = \mathrm{diag}(x_2)$ は、それぞれベクトル x_1 と x_2 の要素の値と等しい対角成分を持つ対角行列である (すなわち、$e = (1, 1, \cdots, 1)$ に対して、$X_1 e = x_1$, $X_2 e = x_2$ が成立する)。逆に、$(x_1, x_2, y_1, y_2, s_1, s_2)$ がこの最適条件 (2) をみたすならば、(x_1, x_2) が主問題の最適解となり、(y_1, y_2, s_1, s_2) が双対問題の最適解となる。上記の最適条件のうち、条件 $X_1 s_1 = 0$ と $X_2 s_2 = 0$ を相補性条件という。点

$w = (x_1, x_2, y_1, y_2, s_1, s_2)$ が条件 (2) の中で相補性条件以外の等式と不等式をみたすとき、この点 w を線形計画問題の実行可能解と呼ぶことにする。実行可能解の集合を

$$F = \left\{ (x_1, x_2, y_1, y_2, s_1, s_2) : \begin{array}{llll} A_1 x_1 & & & = b_1 \\ A_2 x_1 + & A_3 x_2 & & = b_2 \\ A_1^T y_1 + & A_2^T y_2 + & s_1 & = c_1 \\ & A_3^T y_2 + & s_2 & = c_2 \\ & (x_1, x_2, s_1, s_2) \geq 0 & & \end{array} \right\}$$

とする。また、内点の集合を

$$F^0 = \{(x_1, x_2, y_1, y_2, s_1, s_2) \in F : (x_1, x_2, s_1, s_2) > 0\}$$

とする。

3 センター曲線とセンター曲面

線形計画問題の主問題と双対問題の内点の集合 F^0 が空集合でないと仮定する。このとき、任意の $\mu_1 > 0$ と $\mu_2 > 0$ に対し、線形等式不等式系

$$\begin{array}{llll} A_1 x_1 & & & = b_1 \\ A_2 x_1 + & A_3 x_2 & & = b_2 \\ A_1^T y_1 + & A_2^T y_2 + & s_1 & = c_1 \\ & A_3^T y_2 + & s_2 & = c_2 \\ & & X_1 s_1 & = \mu_1 e \\ & & X_2 s_2 & = \mu_2 e \\ & (x_1, x_2, s_1, s_2) > 0 & & \end{array} \tag{3}$$

は唯一つの解を持つことが知られている。この解をセンターと呼び、$w(\mu_1, \mu_2) = (x_1(\mu_1, \mu_2), x_2(\mu_1, \mu_2), y_1(\mu_1, \mu_2), y_2(\mu_1, \mu_2), s_1(\mu_1, \mu_2), s_2(\mu_1, \mu_2))$ と表す。上記の線形等式不等式系 (3) は、線形計画問題の最適条件 (2) の中の相補性条件 $X_1 s_1 = 0, X_2 s_2 = 0$ を $X_1 s_1 = \mu_1 e$, $X_2 s_2 = \mu_2 e$ に置き換えたものであるから、もし $\mu_1 \to 0$ かつ $\mu_2 \to 0$ ならばセンター $w(\mu_1, \mu_2)$ は、最適条件 (2) をみたす解に近づく。

一般の線形計画問題では、ひとつのパラメタ $\mu > 0$ に対して、$\mu_1 = \mu$ かつ $\mu_2 = \mu$ のときのシステム (3) の解をセンターと呼び、その集合をセンター曲線という。したがって、この場合のセンター曲線は、

$$P = \{w(\mu_1, \mu_2) : \mu_1 = \mu_2 > 0\}$$

となる。また、二つのパラメータ $\mu_1 > 0$ と $\mu_2 > 0$ を自由に動かしたときのセンターの集合

$$S = \{w(\mu_1, \mu_2) : \mu_1 > 0, \mu_2 > 0\}$$

は、2次元の曲面 (多様体) となる。この集合 S をセンター曲面と呼ぶ。

4 アルゴリズム

アルゴリズムをはじめるにあたり、センター曲線上の点 $w(\mu^0, \mu^0)$ の近似点 $w^0 = (x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0, s_1^0, s_2^0)$ が得られているものとする。アルゴリズムにより、この初期点から点列 $\{w^k : k = 0, 1, 2, \cdots\}$ を生成し、k 番目の点 $w^k = (x_1^k, x_2^k, y_1^k, y_2^k, s_1^k, s_2^k)$ が求められ、それはある $\mu^k > 0$ に対しセンター $w(\mu^k, \mu^k)$ の近似点となっているものと仮定する。このとき、次の点 w^{k+1} とそのときのセンターのパラメータ μ^{k+1} の求め方について説明する。

定数 $\gamma \in (0, 1)$ を定め、$\mu^{k+1} = \gamma\mu^k$ とする。すなわち、パラメタ μ はアルゴリズムの1反復ごとに γ の割合で減少することになる。次の点 w^{k+1} としてセンター $w(\mu^{k+1}, \mu^{k+1})$ の近似点を求める必要がある。このように点列を生成することにより、アルゴリズムで生成される点列 $\{w^k : k = 0, 1, 2, \cdots\}$ は、センターパス上の点列 $\{w(\mu^k, \mu^k) : k = 0, 1, 2, \cdots\}$ の近似となる。このとき、パラメータの更新式より

$$\mu^k = \gamma^k \mu^0$$

であるので、$k \to \infty$ のとき $\mu^k \to 0$ となる。したがって、k が十分大きくなればセンター $w(\mu^k, \mu^k)$ は、線形計画問題の最適条件 (2) をみたす解に十分近くなり、生成される点 w^k は最適解の近似点となる。

提案するアルゴリズムでは、点 w^k から w^{k+1} を計算するときに、大きく分けて二つのステップを行う。すなわち、点 w^k からまずセンター曲面 S 上の点 $w(\mu^{k+1}, \mu^k)$ の近似点 w' を計算し、そこから次の点 w^{k+1} を求める。

アルゴリズム A：

Step 0: パラメータ $\mu^0 > 0$ に対し、センター $w(\mu^0, \mu^0)$ の近似点 w^0 が得られているものとする。定数 $\gamma \in (0, 1)$ を定め、$k = 0$ とする。

Step 1: パラメータを $\mu^{k+1} = \gamma\mu^k$ と更新する。点 w^k からセンター $w(\mu^{k+1}, \mu^k)$ の近似点 w' を求める。

Step 2: 点 w' からセンター $w(\mu^{k+1}, \mu^{k+1})$ の近似点 w^{k+1} を求める。

Step 3: kを1増加し、Step 1へ戻る。

アルゴリズムの Step 1 と Step 2 についてより詳しく説明する。まず、Step 1 では、センター曲面上の点 $w(\mu^{k+1},\mu^k)$ の近似点をもとめるのであるが、そこではごく普通にニュートン法を適用する。センター $w(\mu^{k+1},\mu^k)$ は、方程式系

$$
\begin{array}{llll}
A_1x_1 & & & = b_1 \\
A_2x_1 + & A_3x_2 & & = b_2 \\
A_1^Ty_1 + & A_2^Ty_2 + & s_1 & = c_1 \\
 & A_3^Ty_2 + & s_2 & = c_2 \\
 & & X_1s_1 & = \mu^{k+1}e \\
 & & X_2s_2 & = \mu^k e
\end{array}
$$

の解であるから、点 w^k においてニュートン法を適用すれば、探索方向 $\Delta w = (\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta y_1, \Delta y_2, \Delta s_1, \Delta s_2)$ は次の線形方程式系

$$
\begin{array}{llll}
A_1\Delta x_1 & & & = b_1 - A_1x_1^k \\
A_2\Delta x_1 + & A_3\Delta x_2 & & = b_2 - A_2x_1^k - A_3x_2^k \\
A_1^T\Delta y_1 + & A_2^T\Delta y_2 + & \Delta s_1 & = c_1 - A_1^Ty_1^k - A_2^Ty_2^k - s_1^k \\
 & A_3^T\Delta y_2 + & \Delta s_2 & = c_2 - A_3^Ty_2^k - s_2^k \\
 & S_1^k\Delta x_1 + & X_1^k\Delta s_1 & = \mu^{k+1}e - X_1^ks_1^k \\
 & S_2^k\Delta x_2 + & X_2^k\Delta s_2 & = \mu^k e - X_2^ks_2^k
\end{array}
$$

の解として計算できる。そして、点

$$(x_1', x_2', y_1', y_2', s_1', s_2') = (x_1, x_2, y_1, y_2, s_1, s_2) + (\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta y_1, \Delta y_2, \Delta s_1, \Delta s_2)$$

を更新した点 w' として計算する。

Step 2 では、変数ベクトル x_1 を Step 1 で求めたベクトル $x_1' \in R^{n_1}$ に固定する。このとき、はじめの問題 (1) は

$$
\begin{array}{lll}
\min & c_1^Tx_1' + c_2^Tx_2 & \\
\text{subject to} & A_1x_1' & = b_1 \\
 & A_2x_1' + A_3x_2 & = b_2 \\
 & (x_1, x_2) \geq 0 &
\end{array}
$$

となる。ここで、x_1' が定数ベクトルであることから、$b_2' = b_2 - A_2x_1'$ とすれば、線形計画問題

$$
\begin{array}{ll}
\min & c_2^Tx_2 \\
\text{subject to} & A_3x_2 = b_2', \quad x_2 \geq 0
\end{array}
$$

と等価になる (目的間数値は $c_1^T x_1'$ だけ異なる)。この問題の双対問題は

$$\begin{array}{ll} \max & (b_2')^T y_2 \\ \text{subject to} & A_3^T y_2 + s_2 \quad = c_2, \\ & s_2 \geq 0 \end{array}$$

となり、最適条件は

$$\begin{array}{rcl} A_3 x_2 & = & b_2' \\ A_3^T y_2 + s_2 & = & c_2 \\ X_2 s_2 & = & 0, \\ (x_2, s_2) & \geq & 0. \end{array}$$

となる。また、パラメータ $\mu > 0$ に対して、センターは方程式系

$$\begin{array}{rcl} A_3 x_2 & = & b_2' \\ A_3^T y_2 + s_2 & = & c_2 \\ X_2 s_2 & = & \mu e, \\ (x_2, s_2) & \geq & 0. \end{array} \tag{4}$$

の解となる。このとき、Step1 で求めた解の部分ベクトル (x_2', y_2', s_2') は、$\mu = \mu^k$ のときのセンターの近似点となっている。

したがって、行列 A_3 が行列 A と同じ構造を持つときは、上記の線形計画問題の最適条件 (4) に対してアルゴリズム A を適用でき、(x_2', y_2', s_2') を初期点として $\mu = \mu^{k+1}$ のときのセンターの近似点 $(\bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{s}_2)$ を計算することができる。また、行列 A_3 がブロック対角行列である場合には、いくつかの小さな線形計画問題に分割することができ、それぞれの子問題に対してセンターパスを定義しパラメータを μ^{k+1} まで減少させたセンターの近似点を計算することにより、$\mu = \mu^{k+1}$ のときのセンターの近似点 $(\bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{s}_2)$ を計算することができる。いずれにしても、行列 A_3 が仮定 1 をみたすならば、Step1 の計算量と同程度あるいはそれ以下の計算量で $\mu = \mu^k$ に対して (4) で定義されたセンターの近似点 $(\bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{s}_2)$ を計算することができる。

ここまでの計算により、点 $\bar{w} = (x_1', \bar{x}_2, y_1', \bar{y}_2, s_1', \bar{s}_2)$ を得ることができる。この点は、その求め方から条件

$$\begin{array}{llll} A_1 x_1 & & & = b_1 \\ A_2 x_1 + & A_3 x_2 & & = b_2 \\ & A_3^T y_2 + & s_2 & = c_2 \\ & & X_1 s_1 & = \mu^{k+1} e \\ & & X_2 s_2 & = \mu^{k+1} e \end{array}$$

を近似的にみたす。しかし、センターを定義する条件のうち

$$A_1^T y_1 + A_2^T y_2 + s_1 = c_1 \tag{5}$$

を近似的にみたすかどうか不明である。そこで、ベクトル

$$\bar{y}_1 = \arg\min_{y_1} \|(S_1')^{-1}(A_1^T y_1 + A_2^T \bar{y}_2 + s_1' - c_1)\|. \tag{6}$$

を計算し、そのとき $(\bar{y}_1, \bar{y}_2, s_1')$ が条件 (5) を近似的にみたすならば、$(x_1', \bar{x}_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2, s_1', \bar{s}_2)$ をセンター $w(\mu^{k+1}, \mu^{k+1})$ の近似点として、Step2 を終える。さもなければ、求めた点 $(x_1', \bar{x}_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2, s_1', \bar{s}_2)$ を初期点として、Step1 と同様な方法で $w(\mu^{k+1}, \mu^{k+1})$ の近似点を計算する必要がある。次の定理は、ある条件が成立すれば、$(\bar{y}_1, \bar{y}_2, s_1')$ が必ず (5) をみたすことを保障するものである。

定理 1 次の条件

$$Range(A_2^T) \subset Range(A_1^T),$$

が成り立つとする。このとき、*Step 1* で計算される点 w' が線形計画問題の実行可能解であるならば *Step2* で計算される $(\bar{y}_1, \bar{y}_2, s_1')$ は *(5)* をみたす。ここで、行列 M に対し $Range(M)$ は、行列 M の列ベクトルの張る空間、すなわち列ベクトルの線形結合で表されるベクトルの集合を表す。

証明 Step 1 で計算される点 w' が線形計画問題の実行可能解であるならば、

$$A_1^T y_1' + A_2^T y_2' + s_1' = c_1$$

が成立する。また、$\mathrm{Range}(A_2^T) \subset \mathrm{Range}(A_1^T)$ であるから、$\bar{y}_2$ に対し、ある $\tilde{y}_1$ が存在し、

$$A_2^T(y_2' - \bar{y}_2) = A_1^T \tilde{y}_1$$

となる。したがって、$\bar{y}_1 = y_1' + \tilde{y}_1$ とすれば、

$$A_1^T \bar{y}_1 + A_2^T \bar{y}_2 + s_1' = c_1$$

となり、$(\bar{y}_1, \bar{y}_2, s_1')$ は (5) をみたし、この $\bar{y}_1$ は問題 (6) の解である。(証明終わり)

この定理の条件が成り立つとき、初期点が実行可能解ならば Step 2 で計算される $(\bar{y}_1, \bar{y}_2, s_1')$ は (5) をみたし、アルゴリズムで生成される点列 $\{w^k\}$ はすべて実行可能と

5 アルゴリズムの解析

アルゴリズムが必要とする反復回数について調べる。実行可能点からなるセンターの近傍

$$
\begin{aligned}
N_\beta(\mu_1,\mu_2) = \;& \{(x_1,x_2,y_1,y_2,s_1,s_2): \\
& A_1x_1 = b_1, \\
& A_2x_1 + A_3x_2 = b_2, \\
& A_1^Ty_1 + A_2^Ty_2 + s_1 = c_1, \\
& A_3^Ty_2 + s_2 = c_2, \\
& \|(X_1s_1 - \mu_1 e, X_2s_2 - \mu_2 e)\| \le \beta \min\{\mu_1,\mu_2\}, \\
& (x_1,x_2,s_1,s_2) \ge 0\}
\end{aligned}
$$

を定義する。

定理 2 $\beta = 1/4$に対して、アルゴリズムでk番目に生成される$w^k = (x_1^k, x_2^k, y_1^k, y_2^k, s_1^k, s_2^k)$がセンター $w(\mu^k,\mu^k)$ の近傍 $N_\beta(\mu^k,\mu^k)$ 上にあるならば、$\gamma = (1-\delta/\sqrt{n_1})$ に対して、*Step 1*で計算される点 $(x_1', x_2', y_1', y_2', s_1', s_2')$ はセンター $w(\mu^{k+1},\mu^k)$ の近傍 $N_\beta(\mu^{k+1},\mu^k)$ 上にある。ここで、 $\delta = 1/4$ であり、n_1 はベクトル x_1 の次元である。

証明：ニュートン方向 $\Delta w = (\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta y_1, \Delta y_2, \Delta s_1, \Delta s_2)$ は線形方程式系

$$
\begin{array}{llll}
A_1\Delta x_1 & & & = b_1 - A_1x_1^k \\
A_2\Delta x_1 + & A_3\Delta x_2 & & = b_2 - A_2x_1^k - A_3x_2^k \\
A_1^T\Delta y_1 + & A_2^T\Delta y_2 + & \Delta s_1 & = c_1 - A_1^Ty_1^k - A_2^Ty_2^k - s_1^k \\
 & A_3^T\Delta y_2 + & \Delta s_2 & = c_2 - A_3^Ty_2^k - s_2^k \\
 & S_1^k\Delta x_1 + & X_1^k\Delta s_1 & = \mu^{k+1}e - X_1^ks_1^k \\
 & S_2^k\Delta x_2 + & X_2^k\Delta s_2 & = \mu^k e - X_2^ks_2^k
\end{array} \tag{7}
$$

の解である。したがって、はじめの 4 つの等式系より、$w' = w^k + \Delta w$ は線形計画問題の等式制約条件をみたす。また、後の二つの等式系より、

$$
\|((X_1^k+\Delta X_1)(s_1^k+\Delta s_1)-\mu^{k+1}e, (X_2^k+\Delta X_2)(s_2^k+\Delta s_2)-\mu^k e)\| = \|(\Delta X_1\Delta s_1, \Delta X_2\Delta s_2)\|
$$

が成立する。後の二つの等式系をさらに使うと、簡単な計算により

$$
\|(\Delta X_1\Delta s_1, \Delta X_2\Delta s_2)\| \le \frac{\sqrt{2}}{4}\|((X_1^kS_1^k)^{-.5}(\mu^{k+1}e - X_1^ks_1^k), (X_2^kS_2^k)^{-.5}(\mu^k e - X_2^ks_2^k))\|^2
$$

が得られる。ここで、

$$
\|((X_1^kS_1^k)^{-.5}(\mu^{k+1}e - X_1^ks_1^k), (X_2^kS_2^k)^{-.5}(\mu^k e - X_2^ks_2^k))\|
$$

$$
\begin{aligned}
&\le \|((X_1^k S_1^k)^{-.5}(\mu^{k+1}e - \mu^k e), 0)\| + \|((X_1^k S_1^k)^{-.5}(\mu^k e - X_1^k s_1^k), (X_2^k S_2^k)^{-.5}(\mu^k e - X_2^k s_2^k))\| \\
&\le \frac{(\mu^k - \mu^{k+1})\sqrt{n_1}}{\sqrt{(1-\beta)\mu^k}} + \frac{\beta\mu^k}{\sqrt{(1-\beta)\mu^k}} \\
&\le \frac{1}{4}\sqrt{\frac{4}{3}}\sqrt{\mu^k} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{4}{3}}\sqrt{\mu^k} \\
&\le \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{4}{3}\mu^{k+1}} \\
&\le \frac{2}{3}\sqrt{\mu^{k+1}}
\end{aligned}
$$

以上の不等式をまとめると、

$$\|((X_1^k + \Delta X_1)(s_1^k + \Delta s_1) - \mu^{k+1}e, (X_2^k + \Delta X_2)(s_2^k + \Delta s_2) - \mu^k e)\| \le \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{4}{9}\mu^{k+1} < \beta\mu^{k+1}$$

が得られる。これから、非負条件をみたすことも示される。したがって、$w' = w^k + \Delta w$ はセンター $w(\mu^{k+1}, \mu^k)$ の近傍 $N_\beta(\mu^{k+1}, \mu^k)$ 上にある。(証明終わり)

この定理より、アルゴリズムでは毎回 $\gamma = (1 - 1/(4\sqrt{n_1}))$ の割合でパラメータ μ^k を減少させることができる。したがって、双対ギャップを 2^{-L} だけ減少させるのに必要な反復回数は $O(\sqrt{n_1}L)$ であり、その解より最適解を計算することができる。

定理 3 定理 *1* の条件が見たされ、初期点が近傍 $N_\beta(\mu^0, \mu^0)$ 上にあるならば、アルゴリズム A は、$O(\sqrt{n_1}L)$ 反復で最適解を求めることができる。

参考文献

[1] Birge, J. and Louveaux, F.: *Introduction to Stochastic Programming*, Springer, New York (1997).

[2] Karmarkar, N.: "A New Polynomial-Time Algorithm for Linear Programming", *Combinatorica* 4 (1984) 373-395.

[3] Kojima, M., Mizuno, S. and Yoshise, A.: "A Primal-Dual Interior Point Algorithm for Linear Programming", *Progress in Mathematical Programming, Interior Point and Related Methods* (ed. N. Megiddo) Springer, New York (1989) 29-47.

[4] Tanabe, K.: "Centered Newton Method for Linear Programming and Quadratic Programming", *Proceedings of the 8th Mathematical Programming Symposium*, Japan (1987) 131-152.